8/04/19

$\max 2x_1 + x_2$

$x_1 + x_2 = 2$

$2x_1 - x_2 \geq 3$

$x_1 - x_2 \leq 1$

$x_1 \geq 0 \quad x_2 \in \mathbb{R}$

$\max 2x + x_2$

$x_1 + x_2 \leq 2$

$-x_1 - x_2 \leq -2$

$-2x_1 + x_2 \leq -3$

$x_1 - x_2 \leq 1$

$x_1 \geq 0 \quad x_2 \in \mathbb{R}$

$x_2 = x_2' - x_2''$ onde $x_2' \geq 0 \quad x_2'' \geq 0$

(B) Πρωτεύον

$$\max\ 2x_1 + x_2' - x_2''$$
$$x_1 + x_2' - x_2'' \le 2$$
$$-x_1 - x_2' + x_2'' \le -2$$
$$-2x_1 + x_2' - x_2'' \le -3$$
$$x_1 - x_2' + x_2'' \le 1$$
$$x_1, x_2', x_2'' \ge 0$$

(Δ) $\min\ 2w_1 - 2w_2 - 3w_3 + w_4$
$$w_1 - w_2 - 2w_3 + w_4 \ge 2$$
$$w_1 - w_2 + w_3 - w_4 \ge 1$$
$$-w_1 + w_2 - w_3 + w_4 \ge -1$$
$$w_1, w_2, w_3 \ge 0$$
$$w_1' = w_1 - w_2$$

$$\min\ 2w_1' - 3w_3 + w_4$$
$$w_1' - 2w_3 + w_4 \ge 2$$
$$w_1' + w_3 - w_4 \ge 1$$
$$-w_1' - w_3 + w_4 \ge -1$$
$$w_1' \in \mathbb{R},\ w_3, w_4 \ge 0$$

$\Rightarrow$

$$\min\ 2w_1' - 3w_3 + w_4$$
$$w_1' - 2w_3 + w_4 \ge 2$$
$$w_1 + w_3 - w_4 = 1$$
$$w_1 \in \mathbb{R}\quad w_3, w_4 \ge 0$$
$$w_3' = -w_3$$

$$\min\ 2w_1' + 3w_3' + w_4$$
$$w_1' + 2w_3' + w_4 \ge 2$$
$$w_1' - w_3' - w_4 = 1$$
$$w_1' \in \mathbb{R}\quad w_3 \le 0\quad w_4 \ge 0$$

Παρατηρώ ότι αν έθετα $w_1 = x_1 + x_2$, $w_2 = 2x_1 - x_2$, $w_3 = x_1 - x_2$ τις σχέσεις όλες που είχα στο αρχικό πρόβλημα θα έφτανα απευθείας στο τελικό πρόβλημα.

$$\min\ 2w_1 + 3w_2 + w_3$$
$$w_1 + 2w_2 + w_3 \ge 2$$
$$w_1 - w_2 - w_3 = 1 \quad w_1 \in \mathbb{R}\quad w_2 \le 0\quad w_3 \ge 0$$

Κατασκευαστικό πρότυπο

(Π)	(Δ)
max	min
i περιορισμός ≤	i-μεταβλητή $w_i \geq 0$
i περιορισμός =	» $w_i \in \mathbb{R}$
i περιορισμός ≥	» $w_i \leq 0$

$$\Longleftrightarrow$$

$x_i \geq 0$	i περιορισμός ≥ 0
$x_i \in \mathbb{R}$	» $=$
$x_i \leq 0$	» $\leq$

Παράδειγμα

$\max\ 10x_1 - 4x_2 + 7x_3$

$w_1 \quad x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 25$

$w_2 \quad 5x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 25$

$w_3 \quad x_1 + x_2 + x_3 = 40$

$w_4 \quad 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 90$

$w_5 \quad 3x_1 - x_2 + x_3 \leq 20$

$x_1 \in \mathbb{R} \quad x_2, x_3 \geq 0$

(Δ)

$\min\ 25x_1 + 25w_2 + 40w_3 + 90w_4 + 20w_5$

$w_1 + 5w_2 + w_3 + 2w_4 + 3w_5 = 10$

$-2w_1 + w_2 - w_3 - w_4 - w_5 \geq -4$

$3w_1 + 2w_2 + w_3 + w_4 + w_5 \geq 7$

$w_1 \geq 0 \quad w_2 \leq 0 \quad w_3 \in \mathbb{R} \quad w_4, w_5 \geq 0$

Παράδειγμα 2

$\min 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4$

$w_1 \quad 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 \leq 19$

$w_2 \quad 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 \geq 22$

$w_3 \quad x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 38$

$x_i \geq 0$

$\max 19w_1 + 22w_2 + 38w_3$

$3w_1 + 2w_2 + w_3 \leq 2$

$2w_1 + 3w_2 - w_3 \leq 3$

$w_1 - w_2 + 2w_3 \leq -4$

$-2w_1 + 3w_2 - 3w_3 \leq 5$

$w_1 \leq 0 \quad w_2 \geq 0 \quad w_3 \in \mathbb{R}$

(Π)

$\max c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$

$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$

$\vdots$

$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$

$x_i \geq 0$

(Δ)

$\min b_1w_1 + \dots + b_mw_m = \sum_{i=1}^{m} \text{πόροςi}\, w_i$

$a_{11}w_1 + \dots + a_{m1}w_m \geq c_1$

$\vdots$

$a_{1i}w_1 + \dots + a_{mi}w_m \geq c_i$

$a_{1n}w_1 + \dots + a_{mn}w_n \geq c_n$

$\max \sum_{j=1}^{n} \underline{\text{αξία}}_{\text{προϊόν j}}\ \text{προϊόν j} - \text{αξία}$

$\sum \underline{\text{πόρος i}}_{\text{προϊόν j}}\ w_i \geq \underline{\text{αξία}}_{\text{προϊόν j}} \quad \exists w_i = \underline{\text{αξία}}_{\text{πόρος i}}$

$\sum_{j=1}^{n} \underline{\text{πόρος i}}_{\text{προϊόν j}}\ \text{προϊόν j} \leq \text{πόρος i}$

Τα w_i εκφράζει την αξία μιας μονάδας του συγκεκριμένου i.

Παράδειγμα Θέλω να μεγιστοποιήσω τα έσοδα.

Πρώτη ύλη	Θρανίο	Τραπέζι	Καρέκλα	Διαθεσιμότητα
	8	6	1	
Ξυλεία (m^3)	8	6	1	48
Κατασκευή (ώρες)	2	1.5	0.5	8
Φινίρισμα (ώρες)	4	2	1.5	20
	60	30	20	

$\max 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$

x_i αριθ. προϊόντων τύπου i, $i = 1,2,3$

w_1 $\quad 8x_1 + 6x_2 + x_3 \le 48$ (ξυλεία)

w_2 $\quad 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \le 8$ (κατασκευή)

w_3 $\quad 4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \le 20$ (φινίρισμα)

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

(Δ) $\min 48w_1 + 8w_2 + 20w_3$

$8w_1 + 2w_2 + 4w_3 \ge 60$ ← Έκφραση των αξία των πόρων για τη κατασκευή ενός θρανίου

$6w_1 + 1.5w_2 + 2w_3 \ge 30$

$w_1 + 0.5w_2 + 1.5w_3 \ge 20$

$w_1, w_2, w_3 \ge 0$

Θεώρημα

~~Πρόταση~~: Αν x μια εφικτή λύση του (Π) και w μια εφικτή λύση του (Δ) τότε $c'x \le b'w$ (Ασθενής Δυϊκότητα)

Απόδειξη x είναι λύση του (Π)

$Ax \le b$

$w \ge 0$ $\quad w'Ax \le w'b = b'w$

w λύση του Δ

$A'w \ge c$ $\quad x'Aw \ge x'c \Rightarrow w'Ax \ge c'x$

$x \ge 0$ $\quad c'x \le b'w$

Θεώρημα: Αν $\bar{x}$ είναι εφικτή λύση του (Π) και $\bar{w}$ μια εφικτή λύση του (Δ) έτσι ώστε $\bar{z} = c'\bar{x} - b'\bar{w} = \bar{u}$

Τότε $\bar{x}$ και $\bar{w}$ είναι άριστες λύσεις του (Π) και (Δ) αντίστοιχα.

Απόδειξη: Έστω x, w τυχαίες λύσεις του (Π) και (Δ) αντίστοιχα.

$c'x \le b'\bar{w} = c'\bar{x}$ $\quad$ $\bar{x}$ άριστη λύση του (Π)

$b'w \ge c'\bar{x} = b'\bar{w}$ $\quad$ $\bar{w}$ άριστη λύση του (Δ)

Δηλ. όσο τα έσοδα μας είναι λιγότερα από τα έξοδα των πόρων δεν έχω φτάσει σε άριστη λύση.

$\bar{u} = b_1w_1 + \dots + b_mw_m = \bar{z}$

$\frac{\partial z}{\partial b_i} = w_i$

Θεώρημα: Αν το (Π) είναι μη φραγμένο τότε το (Δ) δεν έχει εφικτή λύση

F_x σύνολο των εφικτών λύσεων του (Π)

F_w » » » του (Δ)

$\max\limits_{x \in F_x} c'x \to \infty$

$c'x \le b'w$

αν έχει εφ. λύση τότε αυτό είναι φραγμένο, άρα δεν πάει στο άπειρο

Θεώρημα: Αν το (Π) έχει άριστη λύση τότε και το (Δ) έχει άριστη λύση και μάλιστα οι αντίστοιχες τιμές των αντικειμενικών τους συναρτήσεων είναι ίσες.

Απόδ: (Π) $\max c'x$ $\quad$ $\max c'_I x_I + c'_{II} x_{II}$ $\quad$ $(N, I)\begin{pmatrix} x_I \\ x_{II} \end{pmatrix} = b$ $\quad$ έχει λύσει εξετάσεις

$Ax = b$ $\quad$ $x_I, x_{II} \ge 0$

$x \ge 0$ $\quad$ x_{II} βασικές $\quad$ x_I μη βασικές

(Δ) $\min \underline{b}'\underline{w}$

$$\begin{pmatrix} N^T \\ I \end{pmatrix} \underline{w} \geq \begin{pmatrix} c_I \\ c_{II} \end{pmatrix}$$

$w_i \in \mathbb{R}$

Εστω B η βαση που αντιστοιχει στην εφικτη λυση του (Π)

c_B το διανυσμα των αντιστοιχων αντικειμ. ~~συντελεστων~~ συντελεστων

$\underline{w}' = (w_1, \ldots, w_m)'$ $\underline{w}' = \underline{c}_B' B^{-1}$ (λυση Δ)

ΑΝΔ.

i) $\underline{w}$ εφικτη λυση (Δ)

ii) $\min \underline{b}'\underline{w} = \max \underline{c}'\underline{x}$

		x_I	x_{II}
c_{II}	$\underline{b}$	N	I
	$c_{II}'b$	$\underline{c}_{II}' N - \underline{c}_I'$	$\underline{0}$

Πρωτο tableau

$\underline{c}_B$	$B^{-1}b$	$B^{-1}N$	$B^{-1}I$
	$\underline{c}_B' B^{-1}\underline{b}$	$\underline{c}_B' B^{-1}N - \underline{c}_I'$	$\underline{c}_B' B^{-1} - \underline{c}_{II}'$

Τελικο tableau

$\underline{w}' = \underline{c}_B' B^{-1}$ λυση του (Δ)

Θα πρεπει: $\underline{c}_B' B^{-1} N - \underline{c}_I' \geq \underline{0}'$

$\underline{c}_B B^{-1} - \underline{c}_{II}' \geq \underline{0}'$

$\underline{w}' N - \underline{c}_I' \geq \underline{0}' \Rightarrow N^T w - c_I \geq \underline{0}$

$\underline{w}' - \underline{c}_{II}' \geq \underline{0}'$ $\quad \underline{w} \geq \underline{c}_{II}$

$u = \underline{b}'\underline{w} = \underline{w}'\underline{b} = \underline{c}_B' B^{-1} \underline{b} = \underline{c}_B' x = z$

γ) Αν εχω το τελικο ταμπλο μπορω να βρω βελτ. λυση του (Δ)

Θα βρισκεται στη ~~θεση~~ θεση (κατω) απο τη στηλη I (που ηταν στο πρωτο ταμπλο)

II. x

$\max 300x_1 + 200x_2$

$w_1 \quad x_1 + 2x_2 \le 6$

$w_2 \quad 2x_1 + x_2 \le 8$

$w_3 \quad -x_1 + x_2 \le 1$

$w_3 \quad x_2 \le 2$

$x_1, x_2 \ge 0$

(D) $\min 6w_1 + 8w_2 + w_3 + 2w_4$

$w_1 + 2w_2 - w_3 \ge 300$

$2w_1 + w_2 + w_3 + w_4 \ge 200$

$w_1, w_2, w_3, w_3 \ge 0$

B	C_B	b	P_1 (300)	P_2 (200)	P_3	P_4	P_5	P_6
P_3	0	6	1	2	0	0	0	0
P_4	0	8	2	1	1	1	0	0
P_5	0	1	-1	1	0	0	1	0
P_6	0	2	0	1	0	0	0	1
		0	-300	-200	0	0	0	0

Tab. Tableau

P_2	200	4/3	0	1	2/3	-1/3	0	0
P_1	300	10/3	1	0	-1/3	2/3	0	0
P_5	0	3	0	0	-1	1	1	0
P_6	0	2/3	0	0	-2/3	1/3	0	1
		$\frac{3300}{3}$	0	0	100/3	$\frac{400}{3}$	0	0

$w_1 = (z_3 - c_3) + c_3 = \frac{100}{3}$

$w_2 = (z_4 - c_4) + c_4 = \frac{400}{3}$

$w_3 = (z_6 - c_6) + c_6 = 0$

$u = \frac{3300}{3}$

(Π)

$\max 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$

$w_1 \mid x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 15$

$w_2 \mid 2x_2 - x_3 \geq 5$

$w_3 \mid 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 10$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

(Δ)

$\min 15w_1 + 5w_2 + 10w_3$

$w_1 + 2w_3 \geq 3$

$3w_1 + 2w_2 + w_3 \geq 2$

$2w_1 - w_2 - 5w_3 \geq 5$

$w_1 \geq 0 \quad w_2 \leq 0 \quad w_3 \in R$

$\max 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - Mx_6 - Mx_7$

$x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 15$

$2x_2 - x_3 - x_5 + x_6 = 5$

$2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_7 = 10$

			3	2	5	0	0	-M	-M
B	C_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_4	0	15	1	3	2	1	0	0	0
P_6	-M	5	0	2	-1	0	-1	1	0
P_7	-M	10	2	1	-5	0	0	0	1
		-15M	-3 -2M	-2 -3M	-5 +6M	0	M	0	0

Πρώτο tableau

B	C_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_3	5	15/23	0	0	1	4/23	5/23	-5/23	-2/23
P_2	2	65/23	0	1	0	2/23	-9/23	-9/23	-1/23
P_1	3	120/23	1	0	0	9/23	17/23	-17/23	7/23
		$\frac{505}{23}$	0	0	0	5/23	58/23	-58/23 +M	9/23 +M

Τελευταίο tableau

$w_1 = z_4 - c_4 + c_4 = 51/23$

$w_2 = z_6 - c_6 + c_6 = -58/23$

$w_3 = z_7 - c_7 + c_7 = \frac{9}{23}$

$u = \frac{505}{23}$

$w' = (c_B' B^{-1})$

$z_j - c_j = c_B' B^{-1} P_j - c_j = w' P_j - c_j$

$$(w_1, w_2, w_3)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - 0 \geq 0 \Rightarrow w_1 \geq 0$$

$$(w_1, w_2, w_3)\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} - 0 \geq 0 \Rightarrow -w_2 \geq 0 \Rightarrow w_2 \leq 0$$

$$(w_1, w_2, w_3)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - (-M) \geq 0 \Rightarrow w_3 + M \geq 0$$

↑

Αυτο το κάναμε για να ψάξουμε τη σχέση μεταξύ της φοράς ανισώσεων του πρωτεύοντος και των τελικών μεταβλητών

Άσκηση: Να γίνει το ίδιο χρησιμοποιώντας το πρόβλημα:

$$\min\ 3x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 4$$

$$x_2 - x_3 \leq 2$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 6$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$